SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE VERACRUZ
SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR Y SUPERIOR
DIRECCIÓN GENERAL DE TELEBACHILLERATO

OCTAVA OLIMPIADA DE LA CIENCIA **FASE ZONAL 2012**
MATEMÁTICAS **HOJA DE CLAVES DE RESPUESTA**

1. Denotemos por $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ a los siete números. Tenemos que $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}=4,$ de donde $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=24.$ Luego,

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7}{7}=5,$$
$$\frac{24+x_7}{7}=5,$$
$$24+x_7=35,$$

De donde $x_7=11.$

2. Un año no bisiesto tiene 365 días. Como $365=52\cdot 7+1,$ tenemos que en un año no bisiesto hay 52 semanas y 1 día. Como el 2008 fue un año bisiesto y el 27 de mayo fue martes, que es después del 29 de febrero, tenemos que en el 2009 Marvin cumplió años un miércoles, y cumplirá años un jueves en el 2010 y un viernes en el 2011. Ahora bien, como el 2012 es bisiesto, ese año su cumpleaños será en domingo, en el 2013 será en lunes, en el 2014 será en martes, en el 2015 será en miércoles, en el 2016 será en viernes (pues otro año bisiesto) y en el 2017 será en sábado.

3. Notemos que $4^{2^x}=\left(2^2\right)^{2^x}=2^{2\left(2^x\right)}=\left(2^{2^x}\right)^2.$ Luego, si hacemos $y=2^{2^x},$ la ecuación se convierte en

$$y^2+y-42=0$$
$$(y+7)(y-6)=0,$$

De donde $y=6$ ó $y=-7.$ Como $y>0,$ tenemos que $y=2^{2^x}=6$ y por lo tanto

$$\sqrt{2^{2^{2^x}}}=\sqrt{2^6}=2^3=8.$$

4. Denotemos por s al radio del círculo menor, entonces su área es $A_1=\pi s^2\ cm^2.$ Por otro lado, el área del círculo mayor es $A_1+A_2=9\pi\, cm^2.$ Como A_1, A_2 y A_1+A_2 forman una progresión aritmética, tenemos que $A_1+r=A_2$ y $A_1+2r=A_1+A_2$ para algún número $r.$ Luego,

$$A_1+r=\pi s^2+r=9\pi-\pi s^2.$$

Despejando r tenemos que,

$$r=9\pi-2\pi s^2\ cm. \qquad -------(1)$$

Por otro lado,

$$A_1+2r=\pi s^2+2r=9\pi=A_1+A_2,$$

Despejando r

$$r = \frac{9\pi - \pi s^2}{2}\ cm. \qquad --------(2)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2) y despejando s obtenemos:

$$\begin{aligned} 9\pi - 2\pi s^2 &= \frac{9\pi - \pi s^2}{2} \\ 18\pi - 4\pi s^2 &= 9\pi - \pi s^2 \\ 9\pi - 3\pi s^2 &= 0 \\ s^2 &= 3 \\ s &= \sqrt{3}\ cm. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el radio del círculo menor mide $\sqrt{3}\ cm.$

5. Tres cuerdas forman un triángulo si y sólo si se intersectan dos a dos en el interior de la circunferencia. Dos cuerdas se intersectan en el interior de la circunferencia si y sólo si los puntos finales de las cuerdas tienen un orden alternado en la circunferencia. Por lo tanto, si los puntos A, B, C, D, E y F están ordenados en la circunferencia, entonces sólo las cuerdas AD, BE y CF se intersectan dos a dos en el interior de la circunferencia. Luego, cualquier conjunto de 6 puntos determinan un único triángulo, y hay $\binom{8}{6} = 28$ de tales triángulos.
6. En la primera pesada colocamos 10 monedas en cada platillo y nos sobra una. Tenemos dos posibilidades.
   - Si la balanza queda equilibrada entonces la moneda que sobra es la falsa. Tomamos una moneda de cualquier platillo y la comparamos con la falsa para saber si pesa más o pesa menos;
   - Si la balanza no está equilibrada, tomamos las 10 monedas que pesan más y las dividimos en dos grupos de 5 para pesarlas. Si la balanza queda equilibrada, la moneda falsa no está en este grupo de 10 monedas y está en el otro, que pesó menos, luego la moneda falsa pesa menos. Si al comparar los dos grupos de 5 monedas, la balanza no queda equilibrada, entonces la moneda falsa está en el grupo que pesa más y, por lo tanto, pesa más que las demás.

En cualquier caso el mínimo número de pesadas fueron 2.